МАКСИМАЛЬНОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ЧИСЛО ДЛЯ МАТРИЦЫ ПОЛНЫХ ЗАТРАТ

П.И. СТЕЦЮК,
Институт кибернетики имени В.М.Глушкова,
Киев, Украина
stetsyukp@gmail.com

Для матрицы полных затрат в модели Леонтьева описаны свойства максимального сингулярного числа и соответствующих ему правого и левого сингулярных векторов. Если матрица прямых затрат продуктивна, то правый сингулярный вектор определяет наилучшую нормированную структуру вектора конечного выпуска, а левый – наилучшую нормированную структуру вектора добавленной стоимости. Проведено сравнение сингулярных чисел и векторов с числами и векторами Фробениуса для матриц полных затрат Украины (6 отраслей) и США (7 отраслей).
Ключевые слова: модель Леонтьева, матрица полных затрат, сингулярное число, сингулярные векторы, число и векторы Фробениуса.

Введение. Традиционный инструментарий для анализа балансовых моделей и продуктивных матриц [1, 2] связан с числом Фробениуса λ_A – максимальным собственным числом $n \times n$-матрицы A, элементы которой являются неотрицательными. С помощью числа $\lambda_A < 1$ формулируется критерий продуктивности неотрицательной матрицы прямых затрат A в модели Леонтьева. Понятие продуктивности позволяет оценивать границы производственных возможностей сложившихся и планируемых технологий. В статье покажем, что σ_B – максимальное сингулярное число матрицы $B = (I - A)^{-1}$ дополняет новыми возможностями инструментарий для балансовых моделей и продуктивных матриц [3,4]. Матрицу C и вектор u с неотрицательными (положительными) элементами будем называть неотрицательными (положительными) и обозначать их $C \geq 0$ ($C > 0$), $u \geq 0$ ($u > 0$).

1. ПРЯМАЯ И ДВОЙСТВЕННАЯ СТАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

Пусть экономика страны (региона) образована n отраслями, где каждая отрасль выпускает только один вид продукта и разные отрасли выпускают разные продукты. Пусть A – матрица прямых затрат, $A \geq 0$ – $n \times n$–матрица, где коэффициент $a_{ij} \geq 0$ равен величине затрат продукта i на изготовление единицы продукта j.

Прямой моделью Леонтьева называют модель "затраты-выпуск", которая описывается равенством

$$y = (I - A)x, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор валового продукта и $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ – вектор конечного продукта. Здесь и везде далее T – символ транспонирования, I – единичная $n \times n$-матрица.

Матрица A является продуктивной, если неотрицательной является $n \times n$–матрица $B = (I - A)^{-1}$, которая называется матрицей полных затрат (обратной матрицей Леонтьева). Если матрица A является продуктивной, то

$$x = By, \tag{1.2}$$

где $x \geq 0$ для любого $y \geq 0$.

Двойственной моделью Леонтьева является модель равновесных цен, описываемая равенством

$$w = (I - A^T)p, \tag{1.3}$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$ – вектор цен продуктов, p_i – цена единицы продукта i, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ – вектор прибыли (добавленной стоимости), w_i – прибыль от производства единицы продукта i. Если матрица A является прибыльной (т.е. продуктивной), то

$$p = B^T w, \tag{1.4}$$

где $p \geq 0$ для любого $w \geq 0$.

Прямая и двойственная модели Леонтьева связаны равенством

$$p^T y = w^T x, \tag{1.5}$$

которое означает, что совокупный национальный продукт $p^T y$ совпадает с полным национальным доходом $w^T x$. Соотношение (1.5) следует из справедливости следующей цепочки равенств

$$p^T y = p^T (I - A)x = \left((I - A^T)p\right)^T x = w^T x.$$

2. МАКСИМАЛЬНОЕ СИНГУЛЯРНОЕ ЧИСЛО И СИНГУЛЯРНЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ B

Для продуктивной модели Леонтьева максимальному сингулярному числу матрицы $B \ge 0$ (обозначим σ_B) соответствует экстремальная задача [3]: найти

$$\sigma_B = (w_B^*)^T B y_B^* = \max_{y \ge 0,\, w \ge 0} w^T B y \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = 1. \tag{2.2}$$

Число $\sigma_B = \sqrt{\lambda_{max}(BB^T)} = \sqrt{\lambda_{max}(B^T B)}$, где λ_{max} – максимальное собственное число симметрической $n \times n$-матрицы.

Модель (2.1), (2.2) является частным случаем более общей задачи математического программирования [4]: найти

$$f^* = (p^*)^T y^* = \max_{y,\, p \in R^n} p^T y \quad \equiv \max_{x,\, w \in R^n} w^T x = (w^*)^T x^* \tag{2.3}$$

при ограничениях

$$y = (I - A)x, \qquad x \ge 0, \qquad y \ge 0, \tag{2.4}$$

$$w = (I - A^T)p, \qquad p \ge 0, \qquad w \ge 0, \tag{2.5}$$

$$\|y\| = 1, \quad \|w\| = 1, \tag{2.6}$$

где задана матрица A (матрица прямых затрат), а неизвестными являются компоненты n-мерных векторов x, y, p, w. Здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Задача (2.3)–(2.6) объединяет прямую и двойственную модели Леонтьева при условии, что вектор конечного продукта y и вектор норм добавленной стоимости w являются нормированными. Максимизации в (2.3) подлежит величина, которая пропорциональна либо национальному доходу (слева от знака "$\equiv$"), либо национальному продукту (справа от знака "$\equiv$"), что следует из соотношения (1.5), которое связывает прямую и двойственную модели Леонтьева.

Если матрица A является продуктивной, то в задаче (2.3)–(2.6) $f^* = \sigma_B$, а оптимальными векторами будут $x^* = By^*$, $p^* = B^T w^*$, где $y^* = y_B^*$, $w^* = w_B^*$ – одно из оптимальных решений подзадачи (2.1), (2.2). Здесь вектор y_B^* является правым, а вектор w_B^* – левым сингулярным вектором матрицы B, соответствующим числу σ_B.

При этом вектор y_B^* равен собственному вектору матрицы $B^T B$, соответствующему ее максимальному собственному числу $\lambda_{max}(B^T B)$, а вектор w_B^* вычисляется по формуле $w_B^* = By_B^* \Big/ \left\| By_B^* \right\|$.

Лемма 1 [4]. *Если матрица* A *– продуктивна и неразложима, то* $B > 0$ и *задача (2.1), (2.2) имеет единственное решение*

$$y_B^* = \xi(B^T B) > 0 \quad \text{и} \quad w_B^* = \xi(BB^T) > 0, \tag{2.7}$$

где $\xi(BB^T)$ *и* $\xi(B^T B)$ *– собственные векторы матриц* BB^T *и* $B^T B$, *соответствующие их максимальным собственным числам* $\lambda_{max}(BB^T) = \lambda_{max}(B^T B)$.

Матрицу A называют неразложимой, если одновременной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{Vmatrix},$$

где A_1 и A_3 – квадратные подматрицы. Неразложимость матрицы A означает, что каждая отрасль использует (хотя бы косвенно) продукты всех других отраслей.

Пара (y_B^*, w_B^*) определяет такие нормированные векторы конечного продукта y и добавленной стоимости w, при которых реализуется максимальное сингулярное число σ_B – величина, пропорциональная национальному доходу $w^T x$ (национальному продукту $p^T y$). Для национального дохода это легко видеть, если задачу (1.1)–(1.2) записать в такой форме [3]: найти

$$\sigma_B = (w_B^*)^T x_B^* = \max_{x \ge 0,\, y \ge 0,\, w \ge 0} w^T x \tag{2.8}$$

при ограничениях

$$x = By, \tag{2.9}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i^2 = 1. \tag{2.10}$$

Подобную задачу можно записать и для национального продукта, и она будет задавать интерпретацию числа σ_B как максимума величины, пропорциональной национальному продукту. Для этого в целевой функции (2.8) следует использовать $p^T y$, а в ограничении (2.9) взамен равенства $x = By$ использовать равенство $p = B^T w$ из двойственной модели Леонтьева.

3. СИНГУЛЯРНЫЕ ВЕКТОРЫ МАТРИЦЫ B И ИХ СВЯЗЬ С ВЕКТОРАМИ ФРОБЕНИУСА

Число Фробениуса λ_A равно максимальному собственному числу $n \times n$-матрицы $A \geq 0$. Ему соответствует правый вектор Фробениуса, т.е. вектор x_A^F, такой что

$$Ax_A^F = \lambda_A x_A^F \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} (x_A^F)_i = 1. \tag{3.1}$$

Левый вектор Фробениуса равен вектору p_A^F, такому что

$$A^T p_A^F = \lambda_A p_A^F \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} (p_A^F)_i = 1. \tag{3.2}$$

В соотношениях (3.1) и (3.2) векторы Фробениуса масштабированы таким образом, чтобы сумма их компонент равнялась единице. Это связано с удобством интерпретации каждой из компонент этих векторов как доли (в процентном соотношении) вклада той или иной технологии в конечный выпуск продукции.

Для неотрицательных и неразложимых матриц теорема Фробениуса-Перрона (теорема 1.1 [1, стр. 29]) гарантирует существование правого (левого) вектора Фробениуса, все компоненты которого положительны. Если для неотрицательной матрицы A число Фробениуса $\lambda_A < 1$, то матрица $B = (I - A)^{-1}$ является неотрицательной и число Фробениуса для нее равно

$$\lambda_B = \frac{1}{1 - \lambda_A} > 1. \tag{3.3}$$

Числу λ_B соответствует правый вектор Фробениуса y_B^F, такой что

$$By_B^F = \lambda_B y_B^F \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} (y_B^F)_i = 1. \tag{3.4}$$

Левый вектор Фробениуса равен вектору w_B^F, такому что

$$B^T w_B^F = \lambda_B w_B^F \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} (w_B^F)_i = 1. \tag{3.5}$$

Неотрицательные матрицы A и $B = (I - A)^{-1}$ имеют одни и те же правый и левый векторы Фробениуса, т.е. $y_B^F = x_A^F$ и $w_B^F = p_B^F$.

Если неотрицательная матрица симметрическая, то ей соответствуют одинаковые правый и левый векторы Фробениуса. Этот случай имеет место для матриц $B^T B$ и BB^T, для которых векторы Фробениуса тесно связаны с сингулярными векторами y_B^* и w_B^*, которые соответствуют числу σ_B. Так, для матрицы $B^T B$ число Фробениуса равно $\lambda_{B^T B} = \lambda_{\max}\left(B^T B\right) = \sigma_B^2$, а вектор Фробениуса равен вектору y_B, такому что

$$B^T B y_B = \sigma_B^2 y_B \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} (y_B)_i = 1. \tag{3.6}$$

Для матрицы BB^T число Фробениуса равно $\lambda_{BB^T} = \lambda_{\max}\left(BB^T\right) = \sigma_B^2$, а вектор Фробениуса равен вектору w_B, такому что

$$BB^T w_B = \sigma_B^2 w_B \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} (w_B)_i = 1. \tag{3.7}$$

Если нормировать векторы Фробениуса y_B и w_B, то получим правый сингулярный вектор $y_B^* = y_B / \|y_B\|$ и левый сингулярный вектор $w_B^* = w_B / \|w_B\|$ матрицы B, соответствующие числу σ_B.

Если матрица A является продуктивной и неразложимой (лемма 2), то формулы (3.6) и (3.7) позволяют находить векторы $y_B > 0$ и $w_B > 0$. С другой стороны эти векторы можно вычислить, если для матрицы B найти соответствующие числу σ_B правый сингулярный вектор $y_B^* > 0$ и левый сингулярный вектор $w_B^* > 0$ и отмасштабировать их так, чтобы сумма компонент каждого равнялась единице. Второй способ будет правильным и тогда, когда векторы $y_B^* \ge 0$ и $w_B^* \ge 0$.

Для чисел σ_B и λ_B справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Если матрица $A \ge 0$ и $\lambda_A < 1$, то*

$$\sigma_B \ge \lambda_B = \frac{1}{1-\lambda_A} > 1. \tag{3.8}$$

Если матрица A является еще и симметрической, то $\sigma_B = \lambda_B$.

Ее доказательство легко получить, если в задаче (2.1), (2.2) на неизвестные векторы y и w наложить ограничение $y = w$. В новой задаче максимальное значение целевой функции равно λ_B, и оно будет не больше, чем σ_B – максимальное значение целевой функции в задаче (2.1), (2.2). Равенство достигается тогда, когда матрица B является симметрической.

4. ЧИСЛА σ_B И λ_B ДЛЯ УКРАИНЫ И США

Из леммы 2 следует, что чем ближе матрица полных затрат к симметрической, то тем меньшим будет величина разброса между максимальным сингулярным числом σ_B и числом Фробениуса λ_B. Поэтому величину $(\sigma_B - \lambda_B)/\lambda_B$ можно считать характеристикой сбалансированности экономики страны (региона), учитывая, что для отраслевой продукции матрица B отражает взаимосвязь материальных затрат. Эта взаимосвязь будет более равномерной между отдельными отраслями экономики, если матрица B ближе к симметрической. Это подтверждают результаты вычислений для агрегированных межотраслевых балансов Украины и США.

Таблица 1 – Сравнение чисел σ_B и λ_B (Украина, 6 отраслей)

Год	$(\sigma_B - \lambda_B)/\lambda_B$	σ_B	λ_B	λ_A
2009	0.16274	2.94174	2.46300	0.59399
2008	0.16523	2.99386	2.49917	0.59987
2007	0.13839	2.88751	2.48791	0.59806
2006	0.14580	2.97860	2.54431	0.60697
2005	0.13960	3.07682	2.64731	0.62226
2004	0.12643	2.99745	2.61847	0.61810
2003	0.11321	2.93221	2.60025	0.61542

Таблица 2 – Сравнение чисел σ_B и λ_B (США, 7 отраслей)

Год	$(\sigma_B - \lambda_B)/\lambda_B$	σ_B	λ_B	λ_A
2006	0.094080	2.251135	2.039348	0.509647
2002	0.140246	2.277976	1.958499	0.489405
1997	0.121856	2.266445	1.990266	0.497554
1992	0.091624	2.123509	1.928945	0.481582
1887	0.080339	2.096937	1.928471	0.481455
1882	0.079303	2.185321	2.012018	0.502987
1977	0.094080	2.251135	2.039348	0.509647
1972	0.080335	2.162731	1.988987	0.497231

Для Украины рассматривались 6 отраслей, их названия приведены в таблице 3, а матрицы полных затрат взяты из [5, стр.281–318]. Для США рассматривались 7 отраслей, их названия приведены в таблице 4, а матрицы полных затрат взяты из [6, стр. 715–723].

Из первого столбца в таблице 1 видим, что для Украины число σ_B превышает число Фробениуса λ_B не меньше, чем на 11% (2003 год), и не больше, чем на 17% (2008 год). Аналогичные превышения числа σ_B над числом λ_B для США приведены в таблице 2 и составляют не меньше 8% (1882 год) и не больше 14% (2002 год). При этом в таблице 2 преобладают превышения в 8% и 9% и они покрывают разные периоды времени (1972–1992 гг., 2006 год).

Таблица 3 – Векторы (Фробениуса и сингулярные), Украина, 2006

Отрасли	y_B^F	w_B^F	y_B	w_B
Сельское хозяйство	0.07864	0.20429	0.16035	0.12166
Промышленность	0.57453	0.24176	0.31532	0.47011
Строительство	0.00342	0.23283	0.20373	0.08454
Транспорт и торговля	0.25193	0.13138	0.15265	0.19994
Финансовые и страховые услуги	0.04983	0.08729	0.07707	0.06204
Другие услуги.	0.04165	0.10244	0.09088	0.06170

Таблица 4 – Векторы (Фробениуса и сингулярные), США, 2006

Отрасли	y_B^F	w_B^F	y_B	w_B
Agriculture	0.08847	0.24779	0.18794	0.14592
Mining	0.07331	0.10112	0.09019	0.07648
Construction	0.02911	0.21227	0.17760	0.09919
Manufacturing	0.47085	0.24078	0.30895	0.39263
Trade, Transport & Utilities	0.15368	0.08461	0.10434	0.13021
Services	0.16290	0.09270	0.11190	0.13653
Other	0.02169	0.02078	0.01908	0.01903

В таблицах 3 и 4 даны векторы Фробениуса и сингулярные векторы, масштабированные так, что сумма компонент каждого из них равняется единице. Для 2006 года они отражают долевые вклады в конечный продукт (y_B^F и y_B) и прибыль (w_B^F и w_B) для шести агрегированных отраслей Украины (таблица 3) и семи агрегированных отраслей США (таблица 4). Из таблиц видим, что вклад отрасли в векторы Фробениуса может существенно отличаться от вклада этой же отрасли в сингулярный вектор.

Заключение. Для матрицы полных затрат в продуктивной модели Леонтьева приведена экономическая интерпретация максимального сингулярного числа и соответствующих ему сингулярных векторов. С их помощью можно исследовать связи между затратами на производство и ценами при распределении продукции в экономической системе. Это дополняет новыми возможностями традиционный инструментарий для анализа качественных свойств моделей Леонтьева и продуктивных матриц, который можно осуществить с помощью чисел и векторов Фробениуса.

Работа поддержана грантом SNSF-SCOPES, Project Nr. 160605, Valorisation Grant.

Литература

1. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 296 с.
2. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Сучасний економічний аналіз. Ч. 2. Макроекономіка. – Київ: Вища школа, 2004. – 208 с.
3. Стецюк П.И., Эмменеггер Ж.–Ф. Максимальное сингулярное число матрицы и его экономическая интерпретация // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 3. – С. 51–57.
4. Стецюк П.И., Кошлай Л.Б. Оптимальная нормированная структура спроса и добавленной стоимости в продуктивной модели Леонтьева // Там же. – 2010. – № 5. – С. 51–59.
5. Институциональные и технологические изменения в странах с рыночной и переходной экономикой / Стецюк П.И., Бортис Г., Эмменеггер Ж.-Ф. и др. – К.: Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», 2015. – 336 с.
6. Miller R.E., Blair P.D. Input-Output Analysis: Foundations and Extensions. 2nd edition. – Cambridge University Press, 2009. – 750 p.