

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РИШЕНЬ

Приводится формулировка задачи смешанного булева линейного программирования для кратчайшего пути, который проходит через заданное количество вершин ориентированного графа. Даны результаты вычислительных экспериментов с программами решения задач дискретного программирования из NEOS-солвера. Обсуждается формулировка задачи для нахождения кратчайшего гамильтонова пути в ориентированном графе.

© П.И. Стецюк, Э.С. Долинский,
И.И. Парасюк, 2016

УДК 519.85

П.И. СТЕЦЮК, Э.С. ДОЛИНСКИЙ, И.И. ПАРАСЮК

О КРАТЧАЙШЕМ k -ВЕРШИННОМ ПУТИ В ОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

Введение. Пусть $D_{n,n}$ – полный орграф, где n – количество вершин, а $d_{ij} > 0$ – длина дуги, направленной от вершины i к вершине j , $i \neq j$. Задано k – целое число, такое что $2 \leq k \leq n$. Обозначим (i_1, \dots, i_k) последовательность вершин в связном k -вершинном пути, где i_1, \dots, i_k – идущие по порядку вершины орграфа $D_{n,n}$. Он содержит $(k-1)$ дуг, последовательно соединяющих вершины i_1, \dots, i_k . Связный k -вершинный путь, которому соответствует наименьшая суммарная длина входящих в него $(k-1)$ дуг, будем называть кратчайшим k -вершинным путем, а его длину обозначим d_k^* . Кратчайший n -вершинный путь ($k=n$) является кратчайшим гамильтоновым путем в орграфе $D_{n,n}$.

В [1] рассмотрена задача смешанного булева линейного программирования для нахождения кратчайшего k -вершинного пути с зафиксированными начальной и конечной вершинами. Если они неизвестны, то кратчайший k -вершинный путь можно найти с помощью решения задачи смешанного булева линейного программирования из [2]. Целью этой статьи будет обсудить эту задачу, ее сложность и другие свойства. Мы также покажем, что использование современного программного обеспечения для задач дискретного программирования гарантирует нахождение k -вершинных путей для графов с несколькими десятками вершин за время, которое является достаточным для построения оперативного диалогового режима.

1. Обозначения и переменные задачи. Для того, чтобы сформулировать задачу о кратчайшем k -вершинном пути, будем рассматривать оргграф D' , схематически изображенный на рисунке 1. Он включает оргграф $D_{n,n}$ и вершину a , связанную направленными дугами (a,i) и (i,a) с каждой вершиной i из множества вершин оргграфа $D_{n,n}$.

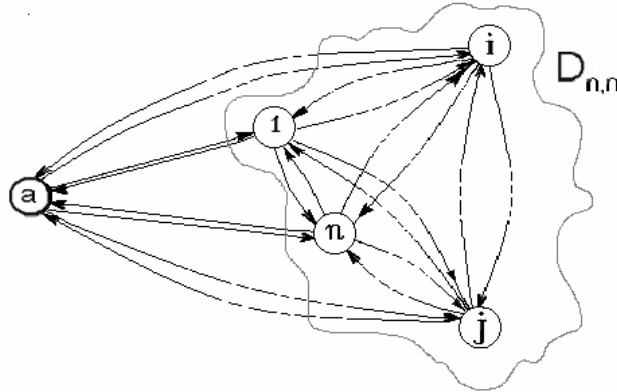


РИСУНОК 1. Оргграф D' (включает оргграф $D_{n,n}$ и вершину a)

Если для всех $i=1, \dots, n$ длины дуг (a,i) и (i,a) положить равными нулю, то нахождение кратчайшего k -вершинного пути в оргграфе $D_{n,n}$ равносильно нахождению в оргграфе D' кратчайшего цикла, который начинается и заканчивается в вершине a и проходит через k вершин оргграфа $D_{n,n}$. Пусть найден кратчайший цикл для оргграфа D' . Тогда дуга этого цикла, исходящая из вершины a , определяет начальную вершину, а дуга, входящая в вершину a , определяет конечную вершину для кратчайшего k -вершинного пути в оргграфе $D_{n,n}$.

При формулировке задачи будем использовать такие переменные. Булева переменная x_{ij} равна единице, если в цикл входит дуга, которая начинается в вершине i и заканчивается в вершине j , и равна нулю в противном случае (т.е. дуга не входит в цикл). Обозначим x_{ai} и x_{ia} – булевы переменные такого же типа, как x_{ij} , но для дуг из вершины a в вершину i и из вершины i в вершину a . Количество переменных x_{ai} , x_{ia} и x_{ij} равно $n + n + n(n-1) = n(n+1)$. Булева переменная y_i равна единице, если цикл проходит через вершину i , и равна нулю в противном случае. Количество таких переменных равно n . Неотрицательная переменная z_{ij} задает величину потока некоторого продукта от вершины i к вершине j , а неотрицательная переменная z_{ai} задает величину потока от вершины a к вершине i . Количество этих переменных равно $n + n(n-1) = n^2$.

2. Формулировка задачи и ее свойства. Кратчайший k -вершинный цикл в орграфе D' (кратчайший k -вершинный путь в орграфе $D_{n,n}$) – это решение следующей задачи смешанного булевого линейного программирования: найти

$$d_k^* = \min_{y_i, x_{ij}, z_{ij}} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} x_{ij} \right\} \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n x_{ai} = 1, \quad \sum_{i=1}^n x_{ia} = 1, \quad (2)$$

$$x_{ai} + \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ji} = y_i, \quad \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} + x_{ia} = y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = k, \quad (4)$$

$$z_{ai} - kx_{ai} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{ai} = k, \quad (6)$$

$$z_{ij} - (k-1)x_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (7)$$

$$z_{ai} + \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} = y_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8)$$

$$y_i = 0 \vee 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (9)$$

$$x_{ai} = 0 \vee 1, x_{ia} = 0 \vee 1, i = 1, \dots, n, x_{ij} = 0 \vee 1, i, j = 1, \dots, n, i \neq j, \quad (10)$$

$$z_{ai} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (11)$$

Минимизация целевой функции в (1) соответствует нахождению кратчайшего (минимального по длине) цикла из вершины a , который проходит через k вершин орграфа $D_{n,n}$. При этом d_k^* соответствует длине этого цикла, что равнозначно длине кратчайшего k -вершинного пути в орграфе $D_{n,n}$. Чтобы обеспечить связность k -вершинного цикла в орграфе D' , в задаче используется идея моделирования задачи о потоке аналогично тому, как это сделано в работе [1].

Теорема [2]. Если k – целое число, удовлетворяющее неравенствам $2 \leq k \leq n$, то для орграфа D' ограничения (2)–(11) описывают все возможные циклы, которые проходят через вершину a и через k вершин орграфа $D_{n,n}$.

Справедливость теоремы обеспечивается за счет наличия двух групп ограничений: ограничения (2) – (4), (9), (10) и ограничения (5)–(8), (11). Ограничения (2) – (4) имеют следующее объяснение. Ограничение (4) задает в точности k вершин орграфа $D_{n,n}$, через которые должен проходить цикл из вершины a .

Этим вершинам соответствуют значения $y_i = 1$, и для них ограничения (3) описывают однократный вход в вершину и однократный выход из вершины. Ограничения (2) описывают однократный выход из вершины a и однократный вход в вершину a .

Однако ограничения (2)–(4) в сочетании с булевыми ограничениями (9) и (10) не обеспечивают связности искомого цикла. Для $k = 3$ на рисунке 2 приведены два допустимых решения, удовлетворяющие ограничениям (2)–(4). Левое из них является связным циклом, проходящим через вершины i_1, i_2, i_3 , а правое состоит из двух несвязных подциклов a, i_3 и i_1, i_2 .

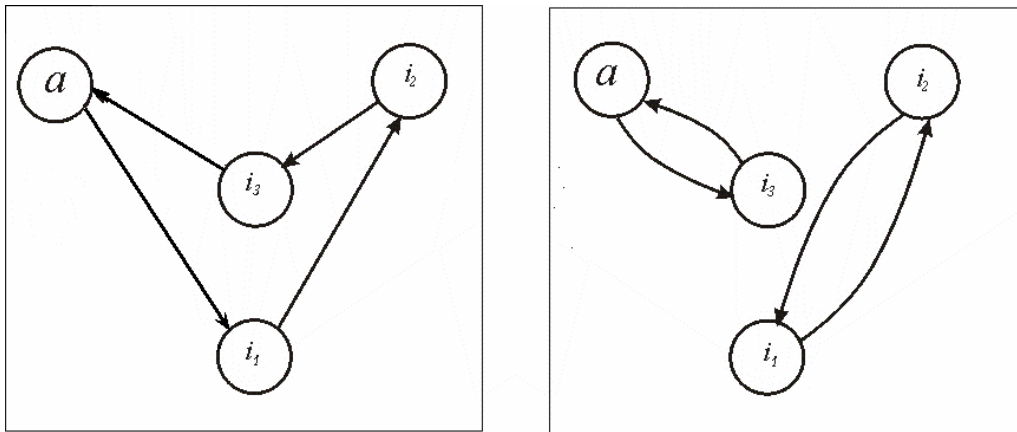


РИСУНОК 2. Связный цикл (слева), два несвязных подцикла (справа)

Чтобы избежать подобных ситуаций и обеспечить связность искомого цикла, используется группа ограничений (5)–(8), (11). Здесь ограничения (5) гарантируют перевозку продукта между вершинами a и i только тогда, если $x_{ai} = 1$, а ограничения (7) гарантируют перевозку продукта между вершинами i и j только тогда, если $x_{ij} = 1$. Ограничения (6) и (8) означают, что из вершины a нужно развезти k единиц продукта, оставляя ровно единицу продукта в каждой из тех вершин орграфа $D_{n,n}$, через которые проходит искомый цикл.

Задача (1)–(11) является задачей смешанного булева линейного программирования. Она содержит $2n(n+1)$ переменных, из которых $n^2 + 2n$ являются булевыми, а n^2 – неотрицательными, и $n^2 + 3n + 4$ ограничений, из которых $3n + 4$ – линейные равенства, а n^2 – линейные неравенства. Задача (1)–(11) справедлива для неполного орграфа, если его дополнить отсутствующими дугами со значениями длин равными сумме длин всех дуг неполного орграфа.

3. О сложности задачи. Чем меньше значение величины k , тем меньше допустимых решений имеет задача (1)–(11). Поэтому, на первый взгляд, решение задачи при $k = n/2$ должно быть проще, чем при $k = n$. Однако для современных реализаций метода ветвей и границ в задачах дискретного линейного программирования это оказывается не так. Данный факт подтверждают результаты вычислительных экспериментов для нахождения кратчайших путей в графе $D_{20,20}$ [3] с помощью программ, имеющихся на NEOS-солвере [4]. Для описания задачи (1)–(11) использовался язык AMPL [5].

ТАБЛИЦА 1. Программы NEOS-солвера для кратчайших путей в графе $D_{20,20}$

k	d_k^*	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
2	0.35	0.05	0.05	0.05	0.04	0.12
3	1.65	0.02	0.02	0.05	0.03	0.09
4	16.05	0.09	0.15	0.07	0.63	1.58
5	27.75	0.20	0.27	0.18	0.81	1.56
6	40.65	0.32	0.44	0.14	2.25	2.25
7	57.85	1.08	0.68	0.37	1.69	8.81
8	92.95	2.04	1.51	0.80	6.06	55.55
9	128.25	1.98	3.18	1.05	8.71	155.78
10	138.75	3.58	2.93	1.24	5.92	143.14
11	150.65	1.29	2.19	1.96	7.14	96.73
12	162.25	0.70	0.75	1.29	3.41	23.33
13	179.45	0.80	0.72	1.05	2.26	63.11
14	204.25	0.72	0.63	0.87	2.97	28.37
15	232.55	1.96	0.81	0.83	2.93	23.33
16	263.55	1.03	0.78	0.43	2.30	18.77
17	299.25	1.09	0.83	0.53	2.43	15.94
18	346.25	1.10	0.82	0.56	1.76	14.82
19	393.85	0.60	0.66	0.31	1.34	6.05
20	447.85	0.30	0.29	0.10	1.03	2.80

Здесь для графа $D_{20,20}$, где вершинами являются 20 наиболее посещаемых пунктов виноделия Малопольской винной дороги, рассчитаны все кратчайшие пути для $k = 2, \dots, 20$. Значения их длин (в километрах) приведены во второй колонке таблицы 1. С третьей по седьмую колонку приводится время решения задач (в секундах) для пяти программ из NEOS-солвера: t_1 – для **gurobi** 6.5.0; t_2 – для **cplex** 12.6.2.0; t_3 – для **xpress-mp** 26.01; t_4 для **cbc** 2.9.4; t_5 – для программы

mosek. Из таблицы 1 видно, что время решения задачи (1)–(11) при $k = 10$ значительно больше, чем время решения задачи при $k = 20$.

Эту же тенденцию можно проследить и для нахождения кратчайших путей в графах $D_{100,100}$, о чем свидетельствуют результаты экспериментов из таблицы 2.

ТАБЛИЦА 2. Программа **cplex** 12.6.2.0 для кратчайших путей в графе $D_{100,100}$

k	kro100A			kro100B		
	d_k^*	t_1	t_2	d_k^*	t_1	t_2
10	1118.0	134.26	9.24	1125.0	125.24	12.95
20	2858.0	138.02	30.00	2719.0	71.99	29.37
30	4609.0	675.14	50.25	4397.0	116.02	37.50
40	6369.0	85.82	44.42	6366.0	220.44	48.81
50	8326.0	161.23	113.14	8464.0	387.09	132.91
60	10409.0	1192.27	116.66	10578.0	437.02	209.30
70	12548.0	280.69	142.33	12676.0	213.77	136.47
80	14700.0	380.12	119.73	14943.0	159.36	53.16
90	17012.0	307.46	82.88	17538.0	593.05	62.12
100	20405.0	654.17	43.70	20912.0	101.53	33.16

Здесь рассматриваются два известных графа kro100A и kro100B из библиотеки TSPLIB. Для них в колонках 2 и 5 даны значения длин кратчайших путей при значениях $k = 10, 20, \dots, 90, 100$. Здесь t_1 и t_2 – затраты по времени (в секундах) для программы **cplex** 12.6.2.0 (на 04.03.2016) для двух форм записи задачи (1)–(11). Они вычислялись с помощью функции "_solve_time". Первая форма соответствует задаче (1)–(11) и является более экономной по количеству ненулевых элементов, чем вторая форма, где ограничения (2) и (3) переписаны так, что включают равенство для входящих в вершину и выходящих из вершины дуг.

4. Кратчайший гамильтонов путь. Если $k = n$, то из ограничения (4) следует, что все булевы переменные y_i равны единице, т.е. n -вершинный путь в графе $D_{n,n}$ совпадает с гамильтоновым путем. Нахождению кратчайшего гамильтонова пути соответствует решение следующей задачи смешанного булева линейного программирования: найти

$$d_k^* = \min_{y_i, x_{ij}, z_{ij}} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} x_{ij} \right\} \quad (12)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n x_{ai} = 1, \quad \sum_{i=1}^n x_{ia} = 1, \quad (13)$$

$$x_{ai} + \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ji} = 1, \quad \sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} + x_{ia} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

$$z_{ai} - nx_{ai} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{ai} = n, \quad (16)$$

$$z_{ij} - (n-1)x_{ij} \leq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (17)$$

$$z_{ai} + \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (18)$$

$$x_{ai} = 0 \vee 1, \quad x_{ia} = 0 \vee 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad x_{ij} = 0 \vee 1, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (19)$$

$$z_{ai} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (20)$$

Здесь ограничения (15) означают, что по дуге из вершины a , для которой $x_{ai} = 1$, перевозится не больше, чем n единиц продукта. Поскольку в каждой из тех вершин орграфа $D_{n,n}$, через которые проходит путь, требуется оставлять ровно единицу продукта, то ограничения (17) означают, что по дуге между вершинами i и j , если $x_{ij} = 1$, достаточно перевозить не более, чем $(n-1)$ единиц продукта. Если в ограничениях (17) границу на потоки по дугам сделать равными n , то задачу для нахождения гамильтонового пути можно записать в более экономной форме, чем задача (12)–(20). Для орграфа, включающего оргграф $D_{n,n}$ и "нулевую" вершину, эта задача имеет следующий вид: найти

$$d_k^* = \min_{y_i, x_{ij}, z_{ij}} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n d_{ij} x_{ij} \right\} \quad (21)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ji} = 1, \quad \sum_{j=0, j \neq i}^n x_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (22)$$

$$z_{ij} - nx_{ij} \leq 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{0i} = n, \quad (24)$$

$$\sum_{j=0, j \neq i}^n z_{ji} - \sum_{j=1, j \neq i}^n z_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (25)$$

$$x_{ij} = 0 \vee 1, \quad z_{ij} \geq 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, n, \quad i \neq j. \quad (26)$$

Заключение. Для нахождения кратчайшего пути, который проходит через заданное количество вершин полного орграфа в статье рассмотрена формулировка задачи смешанного булева линейного программирования. Она справедлива для неполного орграфа, если его дополнить отсутствующими дугами, а значения длин для них установить равными сумме длин дуг неполного орграфа. Если путь

должен проходить через все вершины орграфа, то решение построенной задачи определяет кратчайший гамильтонов путь в ориентированном графе.

Для небольших орграфов предложенную модель можно использовать при выборе оптимальных маршрутов в режиме реального времени. Ее можно применять и тогда, когда начальная и конечная вершины заданы. Для этого достаточно зафиксировать равными единице значения дуг, которые связывают вершину a с начальной и конечной вершинами орграфа $D_{n,n}$.

Работа выполнена при поддержке проектов НАН Украины (№ 0114U001055) и МОН Украины (№ 0115U001906).

П.И. Стецюк, Э.С. Долинський, І.І. Парасюк

ПРО НАЙКОРОТШИЙ k -ВЕРШИННИЙ ШЛЯХ У ОРІЄНТОВАНОМУ ГРАФІ

Наводиться формулювання задачі змішаного булевого лінійного програмування для найкоротшого шляху, який проходить через задану кількість вершин орграфа. Наведено результати обчислювальних експериментів з програмами розв'язання задач дискретного програмування з NEOS-солвера. Обговорюється формулювання задачі для знаходження найкоротшого гамильтонового шляху в орієнтованому графі.

P.I. Stetsyuk, E.S. Dolynskiy, I.I. Parasiuk

ON THE SHORTEST k -NODE PATH IN A DIRECTED GRAPH

We present the formulation of the mixed Boolean linear programming problem for the shortest path, which passes through the given number of nodes of the digraph. The results of numerical experiments of solution of discrete programming problems using NEOS-solver are given. We discuss the formulation of the problem for finding the shortest Hamiltonian path in a directed graph.

1. *Стецюк П.И.* Формулировки задач для кратчайшего k -вершинного пути и кратчайшего k -вершинного цикла в полном графе // Кибернетика и системный анализ. – 2016. – № 1. – С. 78–82.
2. *Стецюк П.И., Долинский Э.С.* Кратчайший k -вершинный путь в ориентированном графе // Информатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали VII Всеукр. наук.-практ. конф. за міжнародною участю(м. Полтава, 10–12 березня 2016 року) /за ред. Ємця О.О. – Полтава: ПУЕТ, 2016. – С. 293-299.
3. *Стецюк П.И., Лефтеров А.В., Федосеев А.И.* Кратчайший k -вершинный путь // Компьютерная математика. – К.: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. – 2015. – №2. – С. 3 – 11
4. *NEOS Solver* [Электронный ресурс]: <http://www.neos-server.org/neos/solvers/>. – Режим доступа: свободный.
5. *Fourer R.* AMPL, A Modeling Language for Mathematical Programming, Second Edition / R. Fourer, D. Gay, B. Kernighan.– Belmont: Duxbury Press, 2003. – 517 p.

Получено 12.04.2016