Ю.П. ЛАПТИН

Коническая регуляризация в задачах квадратичной оптимизации

1. Квадратичные оптимизационные задачи и оценки их оптимальных значений

Квадратичная задача

$$K^* = \sup K_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in R^n \tag{1}$$

при ограничениях

$$K_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = 1,...,m_1;\ K_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = m_1 + 1,...,N,\ m_1 < N, \tag{2}$$

где $K_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{A}_i\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{l}_i, \mathbf{x} \rangle + c_i$, $\mathbf{A}_i$ – симметричные матрицы, $\mathbf{l}_i$ – векторы соответствующих размерностей, $c_i \in R$, $i \in \{0,1,...,N\}$,.

Обозначим $U^- = \{\mathbf{u} = (u_1,...,u_N) : u_i \le 0,\ i = 1,...,m_1\}$. Лагранжева релаксация

$$\psi(\mathbf{u}) = \sup_{\mathbf{x}\in R^n} L(\mathbf{x},\mathbf{u}) \geq K^*, \tag{3}$$

где $L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = K_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N} u_i K_i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{l}(\mathbf{u}),\mathbf{x}\rangle + c(\mathbf{u})$,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^{N} u_i \mathbf{A}_i\,,\ \mathbf{l}(\mathbf{u}) = \mathbf{l}_0 + \sum_{i=1}^{N} u_i \mathbf{l}_i\,,\ c(\mathbf{u}) = c_0 + \sum_{i=1}^{N} u_i c_i\,. \tag{4}$$

Положим D ($\bar{D}$) – подмножества R^N, состоящие из таких $\mathbf{u}\in U^-$, что $\mathbf{A}(\mathbf{u})$ является отрицательно определенной (соответственно – неположительно определенной) матрицей. Если $u \notin \bar{D}$, то $\psi(\mathbf{u}) = +\infty$.

Справедливо соотношение [2]

$$\psi^* = \inf_{\mathbf{u}\in U} \psi(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{u}\in \bar{D}} \psi(\mathbf{u})\,. \tag{5}$$

Пусть $\mathbf{u}\in D$, $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ – решение задачи (3). Вектор $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ является решением системы уравнений [1]

$$2\mathbf{A}(\mathbf{u})\mathbf{x} + \mathbf{l}(\mathbf{u}) = 0\,. \tag{6}$$

Откуда, $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\mathbf{A}(\mathbf{u})^{-1}\mathbf{l}(\mathbf{u})$,

$$\psi(\mathbf{u}) = -\frac{1}{4}\left\langle \mathbf{A}(\mathbf{u})^{-1}\mathbf{l}(\mathbf{u}), \mathbf{l}(\mathbf{u}) \right\rangle + c(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left\langle \mathbf{x}(\mathbf{u}), \mathbf{l}(\mathbf{u}) \right\rangle + c(\mathbf{u}). \qquad (7)$$

Обозначим $\lambda_{\max}(\mathbf{A}(u))$ максимальное собственное число матрицы $\mathbf{A}(u)$. Множество $\bar{D}$ может быть представлено в виде $\bar{D} = \left\{ \mathbf{u} \in R^N : \lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{u})) \le 0,\ u_i \le 0,\ i = 1, \ldots, m_1 \right\}$. Во внутренних точках $(\lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{u})) < 0)$ множества $\bar{D}$ функция $\psi(\mathbf{u})$ непрерывно дифференцируема и принимает конечные значения, на границе $(\lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{u})) = 0)$ множества $\bar{D}$ функция $\psi(\mathbf{u})$ может принимать как конечные значения, так и значения $+\infty$. Особенности поведения функции $\psi(\mathbf{u})$ вблизи границы множества $\bar{D}$ приводит к существенным проблемам при практическом решении задачи (5).

2. Процедуры одномерного поиска для функции $\psi(\mathbf{u})$

Пусть заданы точка $\mathbf{u}^0 \in \operatorname{int} \overline{D}$, такая что $\lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{u}^0)) < 0$, и произвольная точка $\mathbf{u}^1 \in R^N$. Для $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^0 + t\left(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0\right)$, $\mathbf{u}(t) \in D$ соотношение (6) принимает вид

$$\left(\mathbf{A}^0 + t(\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^0)\right) x = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{l}^0 + t\Delta\mathbf{l}\right), \tag{8}$$

где

$\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}(\mathbf{u}^0)$, $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}(\mathbf{u}^1)$, $\mathbf{l}^0 = \mathbf{l}(\mathbf{u}^0)$, $\Delta\mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{u}^1) - \mathbf{l}(\mathbf{u}^0)$ $c^0 = c(\mathbf{u}^0)$, $\Delta c = c(\mathbf{u}^1) - c(\mathbf{u}^0)$,

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{u}(t)\right) = \mathbf{A}^0 + t\left(\mathbf{A}^1 - \mathbf{A}^0\right),$$

$$\mathbf{l}\left(\mathbf{u}(t)\right) = \mathbf{l}^0 + t\left(\mathbf{l}(\mathbf{u}^1) - \mathbf{l}(\mathbf{u}^0)\right) = \mathbf{l}^0 + t\Delta\mathbf{l},$$

$$c\left(\mathbf{u}(t)\right) = c^0 + t\left(c(\mathbf{u}^1) - c(\mathbf{u}^0)\right) = c^0 + t\Delta c.$$

Известно (см., например, [3]), что для вещественных симметричных матриц $-\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^1$ при условии, что матрица $-\mathbf{A}^0$ положительно определена, существует невырожденная матрица $\mathbf{T}$ такая, что

$$\mathbf{T}'\left(-\mathbf{A}^0\right)\mathbf{T} = \mathbf{I},\ \mathbf{T}'\mathbf{A}^{\mathbf{1}}\mathbf{T} = \mathbf{B}, \tag{9}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная, $\mathbf{B}$ – диагональная матрицы.

Пусть матрица $\mathbf{T}$ удовлетворяет условию (9). Полагая $\mathbf{x} = \mathbf{Ty}$, уравнение (8) приведем к виду $\left(-\mathbf{I} + t(\mathbf{B} + \mathbf{I})\right)\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{T}'\left(\mathbf{l^0} + t\boldsymbol{\Delta}\mathbf{l}\right)$, или

$$\left(-1 + \left(B_{ii} + 1\right)t\right)y_i = -\frac{1}{2}\left(\eta_i^0 + t\Delta\eta_i\right),\ i = 1,\ldots,n, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{0}} = \mathbf{T}'\mathbf{l}^{\mathbf{0}},\ \Delta\boldsymbol{\eta} = \mathbf{T}'\Delta\mathbf{l}$, η_i^0, $\Delta\eta_i$, $i = 1,\ldots,n$ – компоненты векторов $\boldsymbol{\eta}^{\mathbf{0}},\ \Delta\boldsymbol{\eta}$.

Положим

$t_{\max} = \min\left\{1/\left(B_{ii} + 1\right) : B_{ii} > -1, i = 1,\ldots,n\right\}$, если $\left\{i : B_{ii} > -1, i = 1,\ldots,n\right\} = \varnothing$, то $t_{\max} = \infty$,

$t_{\min} = \max\left\{1/\left(B_{ii}+1\right): B_{ii} < -1, i=1,...,n\right\}$, если $\left\{i: B_{ii} < -1, i=1,...,n\right\} = \varnothing$, то $t_{\min} = -\infty$,

Утверждение 1. Пусть $t_{\min} < t < t_{\max}$, тогда $\mathbf{u}(t) \in D$, $\mathbf{x(u}(t)) = \mathbf{Ty}(t)$, где $y_i(t) = -\dfrac{\left(\eta_i^0 + t\Delta\eta_i\right)}{2\left(-1+\left(B_{ii}+1\right)t\right)}$, $i=1,...,n$. Если $t_{\max} < \infty$, то $\lambda_{\max}(\mathbf{A(u}(t_{\max}))) = 0$. Аналогично для $t_{\min}$.

Положим $\psi(t) = \psi(\mathbf{u}(t))$. Для $t_{\min} < t < t_{\max}$ функция $\psi(t)$ может быть представлена в виде

$$\psi(t) = \psi(\mathbf{u}(t)) = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\eta_i^0 + t\Delta\eta_i\right)^2}{\left(-1+\left(B_{ii}+1\right)t\right)} + c^0 + t\Delta c. \qquad (11)$$

Обозначим $I^* = \arg\min\left\{1/\left(B_{ii}+1\right): B_{ii} > -1,\ i=1,...,n\right\}$.

Теорема 1. *Пусть* $t_{\max} < \infty$, $\lim\limits_{t<t_{\max}, t\to t_{\max}} \psi(t) < \infty$, *т.е.* $\eta_i^0 + t_{\max}\Delta\eta_i = 0$, $i \in I^*$.

Положим

$$y_i(t_{\max}) = -\frac{\eta_i^0 + t_{\max}\Delta\eta_i}{2\left(-1+\left(B_{ii}+1\right)t_{\max}\right)},\ i \notin I^*, \qquad (12)$$

для $i \in I^*$ *значения* $y_i(t_{\max})$ *определим произвольным образом.*

Тогда вектор $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t_{\max})) = \mathbf{T}\mathbf{y}(t_{\max})$ *есть решение задачи (3) при* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_{\max})$.

Таким образом, теорема 1 определяет решения задачи (3) в точках на границе ($\lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{u})) = 0$) множества $\bar{D}$, в которых функция $\psi(\mathbf{u})$ принимает конечные значения.

Это в свою очередь определяет субградиенты $\mathbf{g}_\psi(\mathbf{u}(t_{\max}))$ функция $\psi(\mathbf{u})$ в таких точках

$$\mathbf{g}_\psi(\mathbf{u}(t_{\max})) = \mathbf{K}(\mathbf{x}(\mathbf{u}(t_{\max}))). \qquad (13)$$

Здесь $\mathbf{K}(\mathbf{x}(\mathbf{u}(t_{\max})))$ – вектор, компонентами которого являются величины $K_i(\mathbf{x}(\mathbf{u}(t_{\max})))$, $i = 1, \ldots, N$.

Поиск минимума функции $\psi(t)$ (минимума по направлению функции $\psi(\mathbf{u})$)

$$\inf\left\{\psi(t) : t_{\min} < t < t_{\max},\ u_i(t) \le 0,\ i = 1, \ldots, m_1\right\}. \qquad (14)$$

Задача (14) – простая и может быть эффективно решена. Наиболее трудоемким является построение матрицы $\mathbf{T}$, удовлетворяющей условию (9).

3. Коническая регуляризация задач оптимизации

Задача выпуклого программирования: найти

$$\psi^* = \inf \psi(\mathbf{u}) \tag{15}$$

при ограничениях

$$h(\mathbf{u}) \le 0, \tag{16}$$

где $\mathbf{u} \in R^n$, $\psi, h : R^n \to R \cup \{+\infty\}$ – выпуклые замкнутые функции.

Обозначим $C = \left\{ \mathbf{u} \in R^n : \ h(\mathbf{u}) \le 0 \right\}$.

Предположение 1**.** $\operatorname{int} C \subseteq \operatorname{dom} \psi$, если $\mathbf{u}$ принадлежит границе множества C, то $h(\mathbf{u}) = 0$.

Предположение 2**.** Задана допустимая точка $\mathbf{u}^0 \in C$ такая, что $h(\mathbf{u}^0) < 0$.

На границе множества C функция ψ может быть не определена (значение функции ψ может быть равно $+\infty$).

Из замкнутости функции ψ следует, что если $\bar{\mathbf{u}}$ принадлежит границе множества C и для любой последовательности $\mathbf{u}^k \in \operatorname{int} C$, $k = 1,\ldots$, такой что $\mathbf{u}^k \to \bar{\mathbf{u}}$ при $k \to +\infty$, выполняется $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(\mathbf{u}^k) < +\infty$, тогда $\bar{\mathbf{u}} \in \operatorname{dom} \psi$.

Пусть задано некоторое число $E < \psi(\mathbf{u}^0)$. Обозначим F надграфик функции ψ на множестве C

$$F = \{(\lambda, \mathbf{u}) \in R \times C : \lambda \geq \psi(\mathbf{u})\}.$$

Положим $\mathbf{z} = (\lambda, \mathbf{u})$, $\mathbf{z} \in R \times R^n$. Рассмотрим коническую оболочку $\mathrm{K}(E)$ надграфика F с вершиной в точке $\mathbf{z}_E^0 = (E, \mathbf{u}^0)$

$$\mathrm{K}(E) = \left\{\mathbf{v} : \mathbf{v} \in R \times R^n,\ \mathbf{v} = \mathbf{z}_E^0 + \alpha(\mathbf{z} - \mathbf{z}_E^0), \alpha \geq 0, \mathbf{z} \in F\right\}. \tag{17}$$

Множество $\mathrm{K}(E)$ выпукло (поскольку выпуклым является множество F), однако может быть незамкнутым (например, если множество C не ограничено, а ψ – линейная функция).

Обозначим $\bar{\mathrm{K}}(E)$ замыкание множества $\mathrm{K}(E)$. Множество $\bar{\mathrm{K}}(E)$ может рассматриваться как надграфик некоторой выпуклой функции. Эту функцию обозначим $\gamma_E(\mathbf{u})$ и будем называть конической аппроксимацией функции ψ на множестве C. Функция $\gamma_E(\mathbf{u})$ определена на всем пространстве R^n и принимает конечные значения при любых $\mathbf{u}$. Пример конической аппроксимации функции приведен на рис. 1.

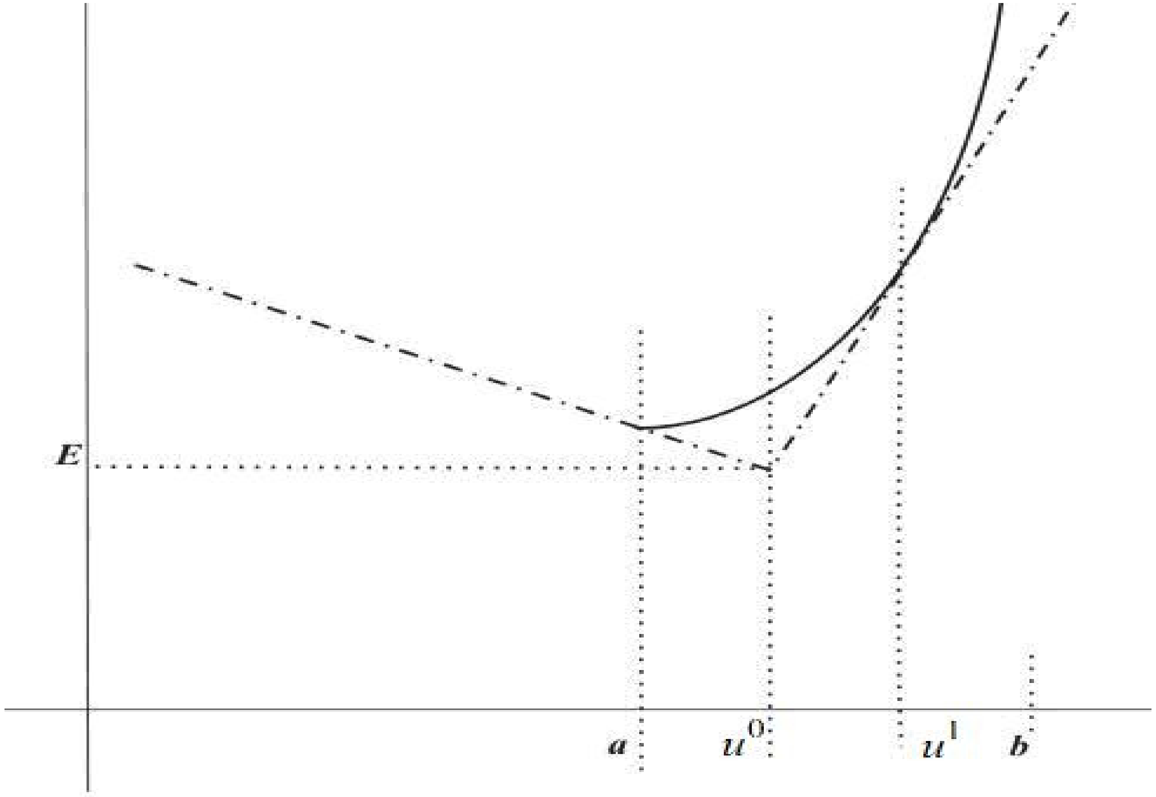

Рис.1. Сплошной линией показана функция $\psi(\mathbf{u})$, штрих-пунктирной – функция $\gamma_E(\mathbf{u})$, в точках $\mathbf{a}$, $\mathbf{u}^1$ значения этих функций совпадают, множество C – отрезок $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Утверждение 2. Пусть множество C ограничено. Тогда для произвольной точки $\mathbf{u} \in R^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}^0$, на луче, выходящем из точки $\mathbf{u}^0$ и проходящем через $\mathbf{u}$, найдется точка $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{u}} \in C$ (возможно не одна) такая, что $\psi(\bar{\mathbf{u}}) = \gamma_E(\bar{\mathbf{u}})$. Если множество C не ограничено, такая точка может не существовать.

Обозначим $\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u})$ такую точку, ближайшую к $\mathbf{u}^0$. Положим

$$\eta_E(\mathbf{u}) = \begin{cases} \left\| \boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}) - \mathbf{u}^0 \right\|, \text{ если точка } \boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}) \text{ существует}, \\ +\infty, \text{ в противном случае}, \end{cases}$$

$$\varphi_E(\mathbf{u}) = \begin{cases} \psi(\mathbf{u}), \text{ если } \left\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^0 \right\| \le \eta_E(\mathbf{u}), \\ \gamma_E(\mathbf{u}), \text{ если } \left\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^0 \right\| > \eta_E(\mathbf{u}). \end{cases} \tag{18}$$

Лемма 1. *Пусть для точки* $\mathbf{u} \in R^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{u}^0$, *существует точка* $\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u})$, *тогда*

$$\gamma_E(\mathbf{u}) = E + (\psi(\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u})) - E) \frac{\left\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^0 \right\|}{\left\| \boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}) - \mathbf{u}^0 \right\|}. \tag{19}$$

Рассмотрим задачу: найти

$$\varphi_E^* = \inf\left\{\varphi_E(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in R^n\right\}. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть* $E \le \psi^*$ *, тогда* $\varphi_E^* = \psi^*$.

Теорема 3. *Пусть выполняются предположения* 1, 2 и $E < \psi(x^0)$. *Тогда* $\varphi_E : R^n \to R$ *– выпуклая функция.*

Задачу (20) будем называть конической регуляризацией исходной задачи (15)–(16).

Обозначим $\psi'(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ производную функции ψ в точке $\mathbf{u} \in C$ по направлению $\mathbf{p}$. Пусть зафиксирована некоторая точка $\mathbf{u}^1$, положим $\mathbf{p} = \dfrac{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0}{\left\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^0\right\|}$, $t^* = \left\|\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}^1) - \mathbf{u}^0\right\|$, если точка $\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}^1)$ не существует, полагаем $t^* = +\infty$.

Лемма 2. *Пусть* $t>0$, $\mathbf{u}^0+\mathbf{p}t\in \operatorname{int} C$. *Тогда*

$$\frac{\psi(\mathbf{u}^0+t\mathbf{p})-E}{t}>\psi'(\mathbf{u}^0+t\mathbf{p},\mathbf{p}),\ \textit{если}\ \ t<t^*, \tag{21}$$

$$\frac{\psi(\mathbf{u}^0+t\mathbf{p})-E}{t}\le -\psi'(\mathbf{u}^0+t\mathbf{p},-\mathbf{p}),\ \textit{если}\ \ t>t^*. \tag{22}$$

Следствие.

$$t^*=\sup\left\{t:\ \frac{\psi(\mathbf{u}^0+t\mathbf{p})-E}{t}>-\psi'(\mathbf{u}^0+t\mathbf{p},-\mathbf{p}),\ \ t\ge 0,\mathbf{u}^0+t\mathbf{p}\in \operatorname{int} C\right\}. \tag{23}$$

Теорема 4. *Пусть точка* $\mathbf{u}^1$ *такая, что* $\bar{\mathbf{u}}=\boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}^1)$ – *внутренняя точка множества* C. *Тогда в точке* $\bar{\mathbf{u}}$ *существует субградиент* $\bar{\mathbf{g}}$ *функции* ψ, *для которого выполняется*

$$\psi(\bar{\mathbf{u}})-E=\left\langle \bar{\mathbf{g}},\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u}^0\right\rangle, \tag{24}$$

и вектор $\bar{\mathbf{g}}$ *есть субградиент функции* γ_E *в точке* $\mathbf{u}^1$ *(в точке* $\bar{\mathbf{u}}$*).*

Теорема 5. *Пусть выполняются предположения 1, 2, точка* $\mathbf{u}^1$ *такая, что* $\bar{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\mu}_E(\mathbf{u}^1)$ *принадлежит границе множества* C*, тогда*

1) $\bar{\mathbf{u}} \in \operatorname{dom} \psi$,

2) $\left\langle \mathbf{g}_h(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^0 - \bar{\mathbf{u}} \right\rangle \neq 0$ и *вектор*

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_\psi(\bar{\mathbf{u}}) + \frac{E - \psi(\bar{\mathbf{u}}) - \left\langle \mathbf{g}_\psi(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^0 - \bar{\mathbf{u}} \right\rangle}{\left\langle \mathbf{g}_h(\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{u}^0 - \bar{\mathbf{u}} \right\rangle} \mathbf{g}_h(\bar{\mathbf{u}}) \tag{25}$$

есть субградиент функции $\gamma_E(\mathbf{u})$ *в точке* $\mathbf{u}^1$ *(в точке* $\bar{\mathbf{u}}$*), где* $\mathbf{g}_\psi(\bar{\mathbf{u}})$, $\mathbf{g}_h(\bar{\mathbf{u}})$ – *субградиенты функций* ψ *и* h в точке $\bar{\mathbf{u}}$.

При использовании предлагаемого подхода значение ψ^* обычно неизвестно. В связи с этим величина E уточняется по ходу решения задачи (20). При получении допустимого решения $\tilde{\mathbf{u}}$ задачи (15)–(16) такого, что $\psi(\tilde{\mathbf{u}}) < E$, полагаем $E = \psi(\tilde{\mathbf{u}}) - B$, где $B > 0$. При фиксированном значении параметра B число таких уточнений будет конечно.

Необходимо отметить, что для вычисления значения функции φ_E в произвольной точке $\mathbf{u}$ должна решаться задача одномерного поиска (23), что в случае общей задачи выпуклого программирования существенно увеличивает трудоемкость по сравнению с вычислением значения функции ψ.

4. Коническая регуляризация оценочной квадратичной задачи

Подходы, приведенные в пункте 3, будем использовать для решения задачи (5), которую представим в виде

$$\psi^* = \inf \ \psi(\mathbf{u}), \tag{26}$$

при ограничениях

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{u})) \le 0. \tag{27}$$

$$u_i \le 0,\ i = 1, \ldots, m_1. \tag{28}$$

Функция $\psi(\mathbf{u})$ вычисляется в соответствии с соотношением (7), матрица $\mathbf{A}(\mathbf{u})$, вектор $l(\mathbf{u})$ и величина $c(\mathbf{u})$ – в соответствии с (4).

Будем считать заданной точку $\mathbf{u}^0 \in \operatorname{int} D$, такую что $\lambda_{\max}(\mathbf{A}(\mathbf{u}^0)) < 0$, и число $E < \psi(\mathbf{u}^0)$. Для произвольной точки $\mathbf{u}^1 \in R^N$ задача одномерного поиска (23) с учетом обозначений, введенных в пункте 2, может быть представлена в виде.

$$t^* = \sup\left\{ t : \frac{\psi(t) - E}{t} > \psi'(t),\ 0 \le t < t_{\max},\ u_i(t) \le 0,\ i = 1,\ldots,m_1 \right\}. \tag{29}$$

Как и для задачи (14) наиболее трудоемким при решении задачи (29) является построение матрицы $\mathbf{T}$, удовлетворяющей условию (9). Таким образом, трудоемкости вычисления значений функций $\psi(\mathbf{u})$ и $\varphi_E(\mathbf{u})$ оказываются соизмеримыми.

Если $t^* < t_{\max} < \infty$, $u_i(t^*) < 0,\ i = 1,\ldots,m_1$, то субградиент функции $\gamma_E(\mathbf{u})$ в точке $\mathbf{u}(t^*)$ определяется решением $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t^*))$, которое вычисляется в соответствии с утверждением 1.

В случае $t^* = t_{\max} < \infty$ возможные решения $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t^*))$ задачи (3) описываются теоремой 1. При формулировке следующей теоремы используются обозначения пункта 2.

Теорема 6. *Пусть* $t^* = t_{\max} < \infty$. *Тогда существует вектор* $\mathbf{y}^* = \left(y_i^*,\, i = 1,...,n \right)$, *удовлетворяющий квадратичному уравнению*

$$-\left\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \right\rangle + \left\langle \mathbf{T}' \mathbf{l^0}, \mathbf{y} \right\rangle + c^0 = E \tag{30}$$

и соотношениям (12) теоремы 1 ($y_i^* = y_i(t_{\max}),\, i \notin I^*$*). При этом вектор* $\mathbf{x}^* = \mathbf{T}\mathbf{y}^*$ *есть решение задачи (3) при* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t^*)$, *а вектор* $\left(K_i(\mathbf{x}^*) \right)_{i=1}^{N}$ *является субградиентом функции* $\gamma_E(\mathbf{u})$ *в точке* $\mathbf{u}(t^*)$. *Здесь матрица* $\mathbf{T}$ *удовлетворяет условию (9).*

1. *Шор Н.З., Стеценко С.И.* Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – Киев: Наукова думка, 1989. – 204 с.
2. *Березовский О.А., Стецюк П.И.* Об одном способе нахождения двойственных квадратичных оценок Шора // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 89–99.
3. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М., «Наука», 1976, с. 352.
4. *Лаптин Ю.П., Бардадым Т.А.* Некоторые подходы к регуляризации нелинейных задач оптимизации // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 3. – С. 57–68.