УДК 519.8

**Березовський О.А.**
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України
berezovskyi@mail.ru

# ДОСТАТНЯ УМОВА ОТРИМАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМУ НЕОПУКЛОЇ КВАДРАТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ДВОЇСТИМ ПІДХОДОМ

В [1] запропоновано достатню умову точності двоїстої оцінки [2] для квадратичної оптимізаційної задачі загального вигляду

$$f^* = \inf_{x \in T \subseteq R^n} f_0(x), \qquad (1)$$

де $T = \{x : f_i(x) \le 0, i \in I^{LQ},\ f_i(x) = 0, i \in I^{EQ}; x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n\}$; $f_i(x) = x^T A_i x + b_i^T x + c_i$, $i \in \{0\} \bigcup I^{LQ} \bigcup I^{EQ}$ – квадратичні функції. Щоб сформулювати цю умову, необхідно ввести наступні позначення:

- $L(x,u) = x^T A(u) x + b^T(u) x + c(u)$ – функція Лагранжа задачі (1);
- $D$ ($\bar{D}$) – множина двоїстих змінних $u \in R^m$, при яких матриця $A(u)$ додатньо (невід'ємно) визначена;
- $U^+ = \{u : u_i \ge 0, i \in I^{LE}\}$;
- $\psi^* = \sup_{u \in D \cap U^+} (\psi(u) = \inf_{x \in R^n} L(x,u)) \le f^*$ – двоїста оцінка задачі (1) [2];
- $x^*$ и $u^*$ – вектори, в яких досягаються значення $f^*$ і $\psi^*$ відповідно;
- для кожного $u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+$ визначено множину $J(u) = \{j : \lambda_j(u) = 0, j \in \{1,...,n\}\}$, де $\lambda_j(u)$, $j = \overline{1,n}$, – власні числа матриці $A(u)$ функції Лагранжа задачі (1), $\xi_j(u)$ – відповідні їм власні вектори.

У цих позначеннях справедлива

**Теорема** [1]**.** Якщо існує такий вектор $p$ і таке додатнє число $\tilde{\varepsilon} > 0$, що для любого $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in (\bar{D} \setminus D) \cap U^+ \ \ \exists j \in J(u) \text{ таке, що } \xi_j^T(u)(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p) \ne 0, \qquad (2)$$

то $\psi^* = f^*$. Причому, якщо умова (2) виконується при $p = 0$, то $x^* = -A^{-1}(u^*) b(u^*) / 2$.

Приклади застосування даної умови для виявлення випадків, коли можна гарантувати знаходження значення і точки глобального екстремуму квадратичної задачі двоїстим підходом, можна знайти в [1], де розглянуто спеціальну задачу, яка зустрічається при синтезі управління, мінімізуючого область локалізації інваріантної множини сімейства нелінійних систем, та в [3], де розглянуто задачу побудови кулі мінімального об'єму з заданим центром, описаної навколо перетину однаково орієнтованих еліпсоїдів.

## Література

1. Berezovskyi O.A. On solving of a special optimization problem connected with determination of invariant sets of dynamical systems // Journal of Automation and Information Sciences. – 2015 – 47 (5). – P. 69–77.
2. Шор Н.З., Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.
3. Березовский О.А., Шулинок И.Э. Использование двойственного подхода для решения одной геометрической задачи // Компьютерная математика. – К.: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2016. – № 2. (в печати)